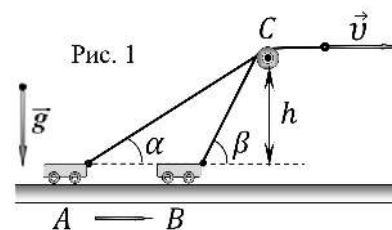


Решение

Задание 9-2. «Среднее ускорение»

1. Небольшую тележку подтягивают нитью по горизонтальной поверхности из положения A в положение B (Рис. 1) к неподвижному блоку C . Легкую нерастяжимую нить AC при этом вытягивают с постоянной скоростью $v = 1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Углы, образуемые нитью с горизонтом, в начальном A и конечном B положениях тележки, равны, $\alpha = 35^\circ$ и $\beta = 65^\circ$, соответственно (см. Рис. 1). Блок расположен на высоте $h = 1,0$ м от горизонтальной поверхности.



Найдите среднюю путевую скорость $v_{\text{ср}}$ тележки на участке AB . Известно, что при движении тележка не отрывается от горизонтальной поверхности.

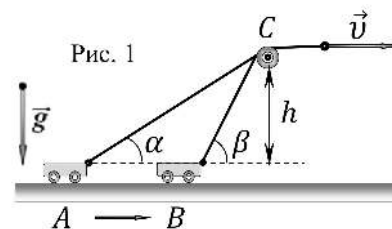
2. Найдите модуль среднего ускорения $a_{\text{ср}}$ тележки на участке AB .

3. Вычислите модуль мгновенного ускорения a_A тележки в точке A с точностью до двух знаков после запятой.

Решение:

9-2. «Среднее ускорение»

1. Пусть высота блока над горизонтальной плоскостью равна h (Рис. 1). Допустим, что тележка переместилась из положения A в положение B (Рис. 1) за некоторый промежуток времени Δt . По мере приближения тележки к блоку, ее скорость возрастает (в этом можно убедиться экспериментально), следовательно, данное движение не является равномерным.



Можно также показать, что движение тележки на рассматриваемом участке не является и равноускоренным (равнопеременным), поскольку её ускорение меняется от точки к точке (от школьников не требуется).

Таким образом, рассматриваемое движение «не проходили» в школе, т.е. ему самое место на олимпиаде. :)

Длина нити AC в начальном положении A тележки (см. Рис. 1) равна длине гипотенузы AC прямоугольного треугольника

$$AC = \frac{h}{\sin \alpha}. \quad (1)$$

В конечном положении B тележки длина нити BC уменьшится и, соответственно, станет равной

$$BC = \frac{h}{\sin \beta}. \quad (2)$$

Следовательно, изменение Δl длины нити за время движения тележки можно найти как

$$\Delta l = AC - BC = \frac{h}{\sin \alpha} - \frac{h}{\sin \beta}. \quad (3)$$

С другой стороны, нить вытягивают с постоянной скоростью v , следовательно, за некоторый промежуток времени Δt «вытянется» её участок длиной Δl

$$\Delta l = v \Delta t = \frac{h}{\sin \alpha} - \frac{h}{\sin \beta}. \quad (4)$$

Из (4) находим промежуток времени Δt , за который тележка переместится из положения A в положение B

$$\Delta t = \frac{h}{v} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \beta} \right). \quad (5)$$

Расстояние AB , пройденное тележкой за рассматриваемый промежуток времени Δt , найдем как разность длин соответствующих катетов

$$AB = \frac{h}{\tan \alpha} - \frac{h}{\tan \beta} = h \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} \right). \quad (6)$$

По определению, средняя скорость $v_{\text{ср}}$ (средняя скорость пути) движения тележки на данном этапе

$$v_{\text{ср}} = \langle v \rangle = \frac{\text{весь путь}}{\text{все время}} = \frac{AB}{\Delta t} = \frac{h \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} \right)}{\frac{h}{v} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \beta} \right)} = \frac{\left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} \right)}{\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \beta} \right)} v. \quad (7)$$

Расчет по приведенным данным даёт

$$v_{\text{ср}} = \frac{\left(\frac{1}{\tan 35^\circ} - \frac{1}{\tan 65^\circ} \right)}{\left(\frac{1}{\sin 35^\circ} - \frac{1}{\sin 65^\circ} \right)} \cdot 1,5 \text{ м/с} = \{2,254070734\}^1 = 2,3 \text{ м/с}. \quad (8)$$

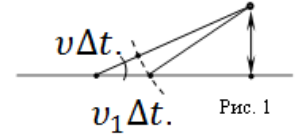
В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательный ответ приводим с точностью до двух значащих цифр.

2. Для нахождения среднего ускорения тележки используем формулу

$$a_{\text{ср}} = \langle a \rangle = \frac{\text{все изменение скорости}}{\text{все время}} = \frac{v_B - v_A}{\Delta t}. \quad (9)$$

Для нахождения мгновенной скорости тележки v_1 в начальном положении C используем метод малых перемещений.

Пусть за малый промежуток времени Δt тележка сместится вправо по горизонтали на расстояние $v_1 \Delta t$. При этом длина нити уменьшится на величину $v \Delta t$. Из соответствующего прямоугольного треугольника получаем (см. Рис 1.)



$$v \Delta t = v_1 \Delta t \cos \alpha. \quad (10)$$

Из (2) находим искомую зависимость

$$v_1(\alpha) = \frac{v}{\cos \alpha}. \quad (11)$$

Тогда среднее ускорение тележки будет равно

$$a_{\text{ср}} = \frac{v_B - v_A}{\Delta t} = \frac{\frac{v}{\cos \beta} - \frac{v}{\cos \alpha}}{\frac{h}{v} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \beta} \right)} = \frac{\frac{1}{\cos \beta} - \frac{1}{\cos \alpha}}{\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \beta} \right)} \cdot \frac{v^2}{h}. \quad (12)$$

Расчет по формуле (12) дает следующее значение

$$a_{\text{ср}} = \frac{\frac{1}{\cos \beta} - \frac{1}{\cos \alpha}}{\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \beta} \right)} \cdot \frac{v^2}{h} = \{4,026458451\} = 4,0 \text{ м/с}^2. \quad (13)$$

3. Для вычисления мгновенного ускорения тележки в точке A можно использовать формулу (13) для среднего ускорения, только нужно догадаться сделать углы α и β очень близким (чем «ближе», тем лучше). Иными словами, при малом промежутке времени Δt средняя скорость «превращается» в мгновенную.

Например, подставим в (13) в качестве первого шага углы β и α с разность в 1° , затем с разностью $0,5^\circ$ и т.д. до тех пор, пока нас не устроит нужное количество «правильных» цифр, которые перестанут меняться при дальнейших вычислениях.

В качестве первого приближения мгновенного ускорения возьмем $\alpha = 35^\circ$, а $\beta = 36^\circ$, тогда из (13) получим

$$a_A = \frac{\frac{1}{\cos 36^\circ} - \frac{1}{\cos 35^\circ}}{\left(\frac{1}{\sin 35^\circ} - \frac{1}{\sin 36^\circ} \right)} \cdot \frac{1,5^2}{1,0} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right) = \{0,8164664511\} = 0,816 \text{ м/с}^2. \quad (14)$$

Второе приближение ($\alpha = 35^\circ$, а $\beta = 35,5^\circ$)

$$a_A = \frac{\frac{1}{\cos 35,5^\circ} - \frac{1}{\cos 35^\circ}}{\left(\frac{1}{\sin 35^\circ} - \frac{1}{\sin 35,5^\circ} \right)} \cdot \frac{1,5^2}{1,0} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right) = \{0,794201876\} = 0,794 \text{ м/с}^2. \quad (15)$$

Третье приближение ($\alpha = 35^\circ$, а $\beta = 35,1^\circ$)

¹ — здесь и далее: в фигурных скобках представлены (без размерности) показания инженерного калькулятора (например, CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)) при правильном расчёте.

$$a_A = \frac{\frac{1}{\cos 35,1^\circ} - \frac{1}{\cos 35^\circ}}{\left(\frac{1}{\sin 35^\circ} - \frac{1}{\sin 35,1^\circ}\right)} \cdot \frac{1,5^2}{1,0} \left(\frac{\text{М}}{\text{с}^2}\right) = \{0,7767504005\} = 0,777 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}. \quad (16)$$

Четвертое приближение ($\alpha = 35^\circ$, а $\beta = 35,05^\circ$)

$$a_A = \frac{\frac{1}{\cos 35,05^\circ} - \frac{1}{\cos 35^\circ}}{\left(\frac{1}{\sin 35^\circ} - \frac{1}{\sin 35,05^\circ}\right)} \cdot \frac{1,5^2}{1,0} \left(\frac{\text{М}}{\text{с}^2}\right) = \{0,7745910834\} = 0,775 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}. \quad (17)$$

Пятое приближение ($\alpha = 35^\circ$, а $\beta = 35,01^\circ$)

$$a_A = \frac{\frac{1}{\cos 35,01^\circ} - \frac{1}{\cos 35^\circ}}{\left(\frac{1}{\sin 35^\circ} - \frac{1}{\sin 35,01^\circ}\right)} \cdot \frac{1,5^2}{1,0} \left(\frac{\text{М}}{\text{с}^2}\right) = \{0,7728671367\} = 0,773 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}. \quad (18)$$

Шестое приближение ($\alpha = 35^\circ$, а $\beta = 35,005^\circ$)

$$a_A = \frac{\frac{1}{\cos 35,005^\circ} - \frac{1}{\cos 35^\circ}}{\left(\frac{1}{\sin 35^\circ} - \frac{1}{\sin 35,005^\circ}\right)} \cdot \frac{1,5^2}{1,0} \left(\frac{\text{М}}{\text{с}^2}\right) = \{0,7726518621\} = 0,773 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}. \quad (19)$$

Как видим, уже на четвертом шаге первые две значащие цифры (0,77) перестали меняться. Дальнейший расчет лишь уточняет следующие значащие цифры, но не меняет эти две цифры после запятой.

Следовательно, искомый ответ

$$a_A = 0,77 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}. \quad (20)$$

Как показывает расчет (см. Задание 11-2), немного «выходящий» за рамки программы 9 класса, точное значение ускорения a_A равно

$$a_A = (\tan \alpha)^3 \cdot \frac{v^2}{h} = \{0,7724366362\} = 0,77 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}. \quad (21)$$

и отличается от (19) «всего лишь» на 0,02 % процента. Иногда просто полезно (и приятно!) уметь хорошо считать! :)