

Решение

Задание 9-1. Шарик в наклонной трубке

Оборудование: шарик стальной (диаметр 19мм), трубка пластиковая прозрачная (примерная длина 50см, внутренний диаметр 22мм), электронный блок для регистрации движения шарика по наклонной плоскости с 4-мя оптическими датчиками и кабелем электропитания, штатив, мерная лента, линейка (40см).

Часть 0. Ознакомление с экспериментальной установкой (не оценивается, затраченное учащимися время на данную часть (до 10 мин) не входит во время отведённое на экспериментальный тур)

Установите трубку так, чтобы один край опирался на столешницу, а другой был поднят на высоту 5,0см от столешницы. Включите электронный блок. На экране должны появиться номера датчиков и напротив датчика «0» должна быть надпись «Готов». Скатите шарик внутрь трубки. Шарик должен скатываться без дополнительного воздействия с вашей стороны.

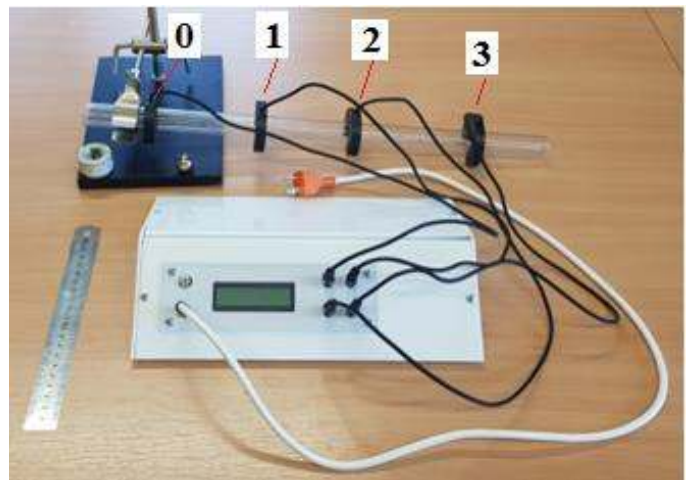


Рисунок 1

Необходимо чтобы шарик почти самопроизвольно перекатывался через край трубки. На экране электронного блока должны появиться моменты времени прохождения шариком через оптические датчики. Первый датчик, через который прошёл шарик имеет номер «0», возле него всегда будет стоять момент времени 0,000с. В дальнейшем будет указываться следующая нумерация датчиков: 0; 1; 2; 3. При выполнении заданий датчик «0» всегда остаётся на одном и том же месте, положение остальных датчиков будет изменяться. Датчик «0» установите на расстоянии 4,0см от края трубки. Потренируйтесь пользоваться экспериментальной установкой.

Часть 1. Базовая (Погрешности в данной части вычислять не нужно)

1.1 Установите расстояния между серединами датчиков 12,0 см. Скатите шарик. Определите моменты времени прохождения шариком через датчики. Эксперимент проведите несколько раз. Результаты оформите в виде таблицы.

1.2 Определите средние скорости прохождения шариком расстояний: между 0-ым и 1-ым датчиком $\langle v_1 \rangle$, между 1-ым и 2-ым датчиком $\langle v_2 \rangle$, между 2-ым и 3-им датчиком $\langle v_3 \rangle$.

1.3 Используя результаты полученные в п.1.1, определите среднее значение скорости шарика $\langle v_{01} \rangle$ в момент прохождения датчика «0» и среднее ускорение шарика $\langle a_1 \rangle$.

Часть 2. Профильная

2.1 Запишите кинематический закон равноускоренного движения $x(t)$ для эксперимента проведённого в п.1.1.

2.2 Запишите кинематический закон равноускоренного движения в линеаризованном виде. То есть уравнение $x(t)$ для равноускоренного движения нужно преобразовать так, чтобы оно было аналогично линейному уравнению $y = kx + b$ (1). Укажите какие величины в Вашем линеаризованном уравнении будут аналогичны величинам y , k , x , b в уравнении (1).

2.3 Исследуйте ускоренное движение шарика вниз по трубке экспериментально: устанавливая датчики «1», «2» и «3» на различном расстоянии от датчика «0», получите соответствующие значения координат и моментов времени. Результаты оформите в виде таблицы.

Подсказка. Три пары значений уже получены в части 1. Из-за ограниченности времени на задачу в данном пункте для каждого положения датчиков проводите измерения по одному разу.*

2.4 Используя результаты эксперимента п.2.3, проверьте, выполняется ли линеаризованное уравнение, полученное Вами в п.2.2. (Подсказка. Проверьте с помощью графиков).

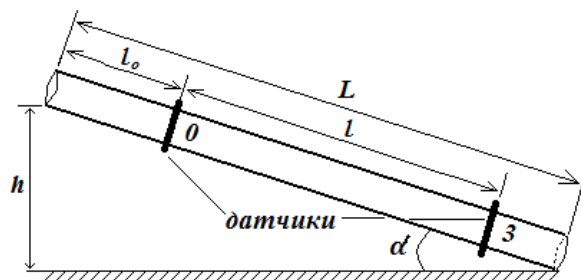
2.5 Используя простую графическую обработку (ПГО) или метод наименьших квадратов (МНК), определите среднее значение скорости шарика $\langle v_{02} \rangle$ в момент прохождения датчика «0» и среднее ускорение шарика $\langle a_2 \rangle$. Вычислите абсолютную и относительную погрешности этих величин. Окончательный результат запишите в виде: $v_{02} = \langle v_{02} \rangle \pm \Delta v_{02}$ и $a_2 = \langle a_2 \rangle \pm \Delta a_2$.

Часть 3. Олимпийская

3.1 Установите между серединами датчиков «0» и «3» расстояние $l = 40,0$ см. Датчики «1» и «2» должны находиться на трубке, положение этих датчиков произвольное, их показание записывать не нужно. Исследуйте зависимость $t(h)$, где t – время прохождения шариком расстояния l , h – высота верхнего края трубки над поверхностью стола (рис.2). *Подсказка. Повторные измерения проводить не нужно. При углах наклона желоба до 30° шарик при скатывании не проскальзывает. Ускорение шарика пропорционально ускорению свободного падения.*

3.2 Получите уравнение зависимости $t(h)$ в явном виде. Используйте обозначения, указанные на рис.2. Другие необходимые величины обозначьте сами. Соппротивлением воздуха пренебречь.

3.3 Используя результаты полученные в п.3.1, проверьте, подтверждается или нет зависимость, полученная Вами в п.3.2



Задание 9-1. Шарик в наклонной трубке

Решение

Часть 1. Базовая

1.1

		Повторные измерения					
№ индекса в формуле	$\langle X \rangle, \text{см}$	$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$t_3, \text{с}$	$t_4, \text{с}$	$t_5, \text{с}$	$\langle t \rangle, \text{с}$
1	12,0	0,371	0,371	0,371	0,37	0,369	0,370
2	24,0	0,597	0,597	0,599	0,599	0,598	0,598
3	36,0	0,783	0,778	0,781	0,781	0,779	0,780

1.2

$$\langle v_1 \rangle = \frac{\langle x \rangle_1 - x_0}{\langle t \rangle_1 - t_0} = \frac{12,0 \text{ см} - 0}{0,370 \text{ с} - 0} = 32,4 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad (1)$$

$$\langle v_2 \rangle = \frac{\langle x \rangle_2 - \langle x \rangle_1}{\langle t \rangle_2 - \langle t \rangle_1} = \frac{24,0 \text{ см} - 12,0 \text{ см}}{0,598 \text{ с} - 0,370 \text{ с}} = 52,6 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad (2)$$

$$\langle v_3 \rangle = \frac{\langle x \rangle_3 - \langle x \rangle_2}{\langle t \rangle_3 - \langle t \rangle_2} = \frac{36,0 \text{ см} - 24,0 \text{ см}}{0,780 \text{ с} - 0,598 \text{ с}} = 65,9 \frac{\text{см}}{\text{с}}. \quad (3)$$

1.3 Запишем уравнения кинематического закона равноускоренного движения шарика для координат $\langle x \rangle_2$ и $\langle x \rangle_3$ и соответствующих моментов времени:

$$\langle x \rangle_2 = \langle v_{01} \rangle \cdot \langle t \rangle_2 + \frac{\langle a_1 \rangle \cdot \langle t \rangle_2^2}{2}, \quad (4)$$

$$\langle x \rangle_3 = \langle v_{01} \rangle \cdot \langle t \rangle_3 + \frac{\langle a_1 \rangle \cdot \langle t \rangle_3^2}{2}. \quad (5)$$

Решая систему уравнений (4) и (5) получим:

$$\langle a_1 \rangle = \frac{2\langle x \rangle_3 - 2\frac{\langle x \rangle_2 \langle t \rangle_3}{\langle t \rangle_2}}{\langle t \rangle_3^2 - \langle t \rangle_2 \langle t \rangle_3} = \frac{2 \cdot 36,0 \text{ см} - 2 \cdot \frac{24,0 \text{ см} \cdot 0,780 \text{ с}}{0,598 \text{ с}}}{(0,780 \text{ с})^2 - 0,780 \text{ с} \cdot 0,598 \text{ с}} = 66,2 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad (6)$$

$$\langle v_{01} \rangle = \frac{\langle x \rangle_2}{\langle t \rangle_2} - \frac{\langle a_1 \rangle \cdot \langle t \rangle_2}{2} = \frac{24,0 \text{ см}}{0,598 \text{ с}} - \frac{66,2 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \cdot 0,598 \text{ с}}{2} = 20,3 \frac{\text{см}}{\text{с}}. \quad (7)$$

Допускается для учащихся подставить значения $\langle x \rangle_2$, $\langle x \rangle_3$, $\langle t \rangle_2$, $\langle t \rangle_3$ в уравнения (4) и (5) и решить систему уравнений в числах.

Часть 2. Профильная

2.1 Кинематический закон равноускоренного движения для данного случая имеет вид:

$$x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (8)$$

2.2 В линеаризованном виде:

$$\frac{x}{t} = v_0 + \frac{at}{2}. \quad (9)$$

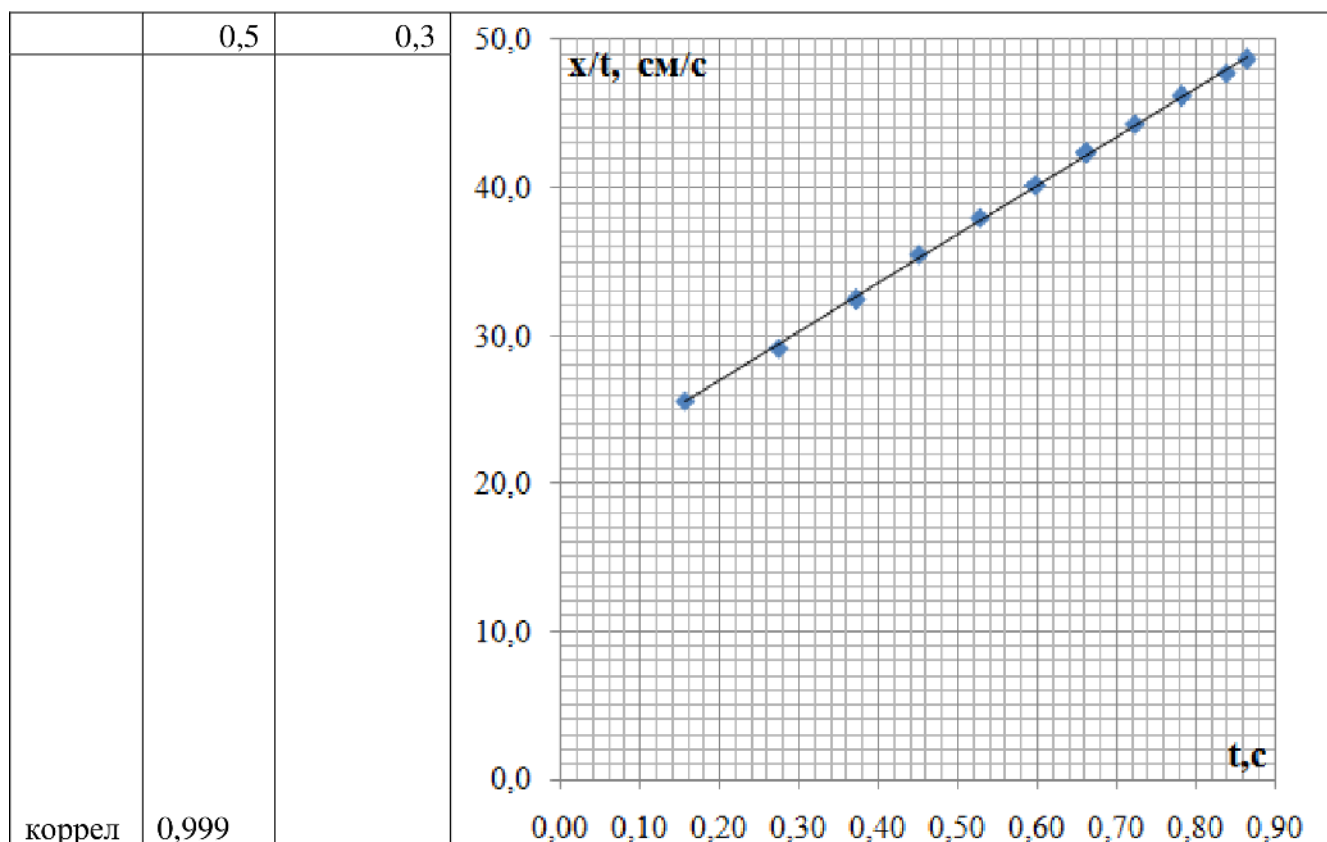
$$\frac{x}{t} \rightarrow y, \quad \frac{a}{2} \rightarrow k, \quad x \rightarrow t, \quad b \rightarrow v_0. \quad (10)$$

2.3 и 2.4

Построим график линеаризованной зависимости $\frac{x}{t}(t)$ по уравнению (9). Вычислим значения $\frac{x}{t}$.

2.3		2.4	
X, см	t, с	$\frac{x}{t}$, см/с	
4,0	0,156	25,6	
8,0	0,274	29,2	
12,0	0,370	32,4	
16,0	0,451	35,4	
20,0	0,527	38,0	
24,0	0,598	40,1	
28,0	0,662	42,3	
32,0	0,723	44,3	
36,0	0,780	46,1	
40,0	0,838	47,7	
42,0	0,863	48,6	
сред	0,57	39,07	
дисп	0,050	54,033	
ковар		1,642	
N	$\langle k \rangle$	$\langle b \rangle$	
11	32,9	20,4	
	Δk	Δb	График линеаризованной зависимости $\frac{x}{t}(t)$

	0,5	0,3
коррел	0,999	



По графику видим, что экспериментальные точки расположились вблизи некоторой усредняющей прямой. Данный факт подтверждает то, что линеаризованное уравнение (9) выполняется.

2.5 Используя МНК получаем: среднее значение скорости шарика $\langle v_{02} \rangle$ в момент прохождения датчика «0»

$$\langle v_{02} \rangle = \langle b \rangle = 20,4 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad \Delta v_{02} = \Delta b = 0,3 \frac{\text{см}}{\text{с}},$$

$$\varepsilon_{v_{02}} = \frac{\Delta v_{02}}{\langle v_{02} \rangle} = \frac{0,3 \frac{\text{см}}{\text{с}}}{20,4 \frac{\text{см}}{\text{с}}} = 0,015 = 1,5\%,$$

среднее ускорение шарика $\langle a_2 \rangle$

$$\langle k \rangle = \left\langle \frac{a_2}{2} \right\rangle = 32,9 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \text{ откуда } \langle a_2 \rangle = 65,8 \frac{\text{см}}{\text{с}^2},$$

$$\Delta a_2 = 2 \cdot \Delta k = 2 \cdot 0,5 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} = 1 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \varepsilon_{a_2} = \frac{\Delta a_2}{\langle a_2 \rangle} = \frac{1 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}}{65,8 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}} = 0,015 = 1,5\%.$$

$$v_{02} = (20,4 \pm 0,3) \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad a_2 = (66 \pm 1) \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Часть 3. Олимпийская

3.1 Проведём исследования в диапазоне высот от 4,0 см до 25,0см. Минимальное значение ограничивается возможностью опустить как можно ниже лапку штатива, максимальное ограничиваем углом наклона трубки к горизонту (не более 30°) Таблица результатов приведена в решении п.3.3.

3.2 Если бы трубка была гладкой и при движении шарик бы не вращался, то он двигался бы с ускорением $a = g \sin \alpha$ (11). Однако шарик при движении вращается. Следовательно часть начальной потенциальной энергии шарика преобразуется в кинетическую энергию вращения. Это приводит к тому, что уменьшается кинетическая энергия поступательного движения центра шарика, а значит ускорение поступательного движения центра шарика будет меньше чем в случае если бы шарик не вращался. Но ускорение шарика будет прямо пропорционально g и $\sin \alpha$. Поэтому для ускорения шарика можем записать

$$a = cg \sin \alpha, \quad (12)$$

где $c < 1$ - некоторый постоянный коэффициент, не зависящий от угла наклона трубки, не имеющий единиц измерения. Из рисунка 2:

$$\sin \alpha = \frac{h}{L}, \quad (13)$$

тогда

$$a = cg \frac{h}{L}. \quad (14)$$

Используя кинематический закон равноускоренного движения, запишем:

$$l = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (15)$$

Начальную скорость v_0 определим из уравнения

$$l_0 = \frac{v_0^2}{2a}. \quad (16)$$

Получим:

$$v_0 = \sqrt{2al_0} = \sqrt{2cg \frac{h}{L} l_0}. \quad (17)$$

Подставляя (14) и (17) в (15), получим:

$$l = t \cdot \sqrt{2cg \frac{h}{L} l_0} + \frac{cg h t^2}{2L}. \quad (18)$$

Уравнение (18) – есть уравнение зависимости $t(h)$ в неявном виде. Чтобы перейти к явному виду запишем (18) следующим образом:

$$\frac{cg}{2L} \cdot (t\sqrt{h})^2 + \sqrt{\frac{2cgl_0}{L}} \cdot t\sqrt{h} - l = 0 \quad (19)$$

Уравнение (19) представляет собой квадратное уравнение относительно переменной $t\sqrt{h}$. Обозначим:

$$\frac{cg}{2L} = A, \quad \sqrt{\frac{2cgl_0}{L}} = B, \quad -l = C, \quad t\sqrt{h} = X \quad (20)$$

Дискриминант:

$$D = B^2 - 4AC = \frac{2cgl_0}{L} + 4\frac{cg}{2L}l = \frac{2cg}{L}(l_0 + l) \quad (21)$$

Положительный корень:

$$t\sqrt{h} = X = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A} = \frac{\sqrt{D}}{2A} - \frac{B}{2A} = \frac{\sqrt{\frac{2cg}{L}(l_0 + l)}}{2\frac{cg}{2L}} - \frac{\sqrt{\frac{2cgl_0}{L}}}{2\frac{cg}{2L}} \quad (22)$$

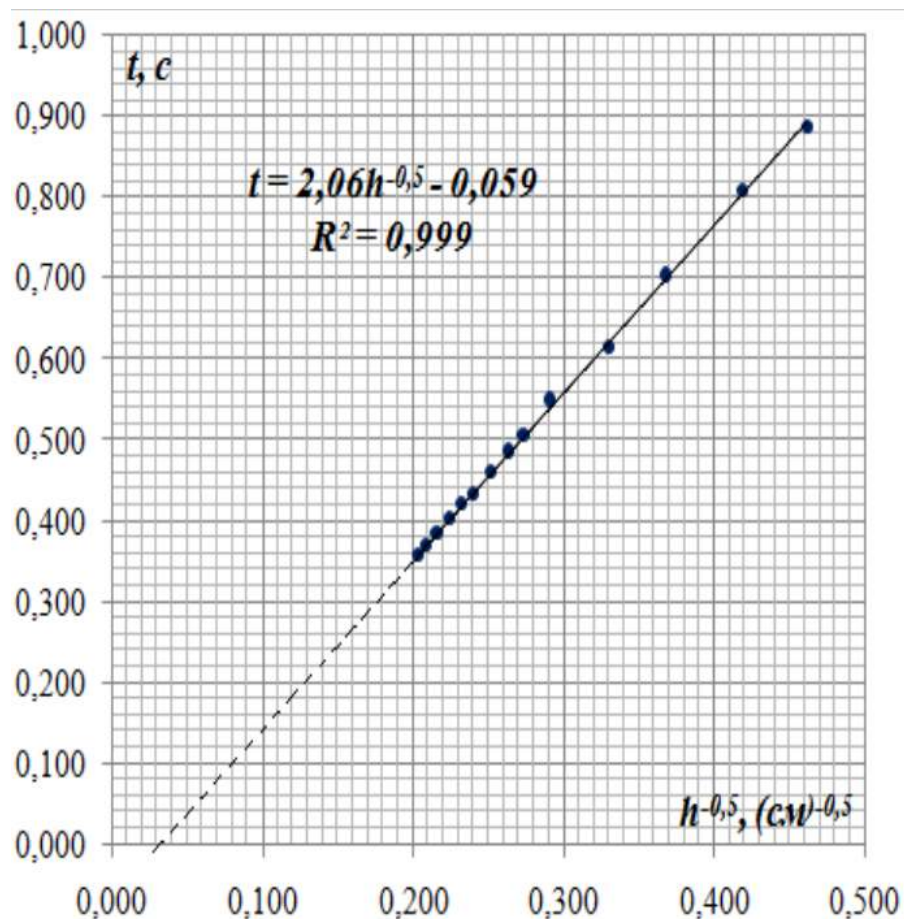
$$t\sqrt{h} = \sqrt{\frac{2L}{cg}(l_0 + l)} - \sqrt{\frac{2L}{cg}l_0} = \sqrt{\frac{2L}{cg}} \cdot (\sqrt{l_0 + l} - \sqrt{l_0}) \quad (23)$$

Из (23) получаем зависимость $t(h)$ в явном виде:

$$t = \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \sqrt{\frac{2L}{cg}} \cdot (\sqrt{l_0 + l} - \sqrt{l_0}) \quad (24)$$

3.3 Для проверки подтверждается ли уравнение (24) экспериментально, построим график зависимости $t\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)$.

3.1		3.3	
h , см	t , с	$\frac{1}{\sqrt{h}}$, см ^{-0,5}	График линеаризованной зависимости $t\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)$
4,7	0,886	0,461	
5,7	0,808	0,419	
7,4	0,704	0,368	
9,2	0,615	0,330	
11,8	0,549	0,291	
13,4	0,506	0,273	
14,4	0,486	0,264	
15,8	0,461	0,252	



17,4	0,434	0,240
18,5	0,420	0,232
19,9	0,402	0,224
21,5	0,384	0,216
22,9	0,369	0,209
24,1	0,358	0,204
сред	0,53	0,28
дисп	0,026	0,006
ковар	0,013	
N	b	a
14	-0,059	2,06
	Δb	Δa
	0,008	0,03
коррел		0,999

Построим усредняющую прямую. Видим, что она не проходит через начало координат. Для определения не является ли это следствием погрешности рассчитаем угловой коэффициент наклона усредняющей прямой и свободное слагаемое, а так же определим их абсолютные погрешности. По МНК находим: - угловой коэффициент наклона усредняющей прямой $a = (2,06 \pm 0,03) \frac{с}{см^{-0,5}}$, - свободное слагаемое $b = (-0,059 \pm 0,008)с$, $\varepsilon_b = 14\%$.

Видим, что абсолютная погрешность свободного слагаемого намного меньше чем его среднее

значение. Начало координат по вертикальной оси не попадает в интервал абсолютной погрешности свободного слагаемого. Следовательно погрешность измерений не является причиной того, что усредняющая прямая не проходит через начало координат. Это значит, что уравнение (24) экспериментально не подтверждается. Уравнение (24) есть прямо пропорциональная зависимость $t \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \right)$, а экспериментально мы получили линейную зависимость. Причина того, что эксперимент не подтверждает теоретические выводы возможно в том, что мы пренебрегли сопротивлением воздуха. Зазор между стенками трубки и шариком довольно мал: изменяется от нуля (шарик касается трубки внизу) до 3мм сверху шарика. При таком малом зазоре сила сопротивления воздуха уже будет оказывать существенное влияние на характер движения шарика.