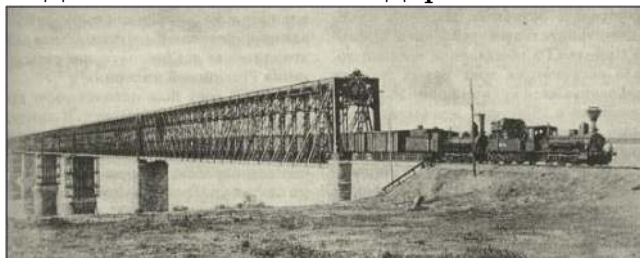
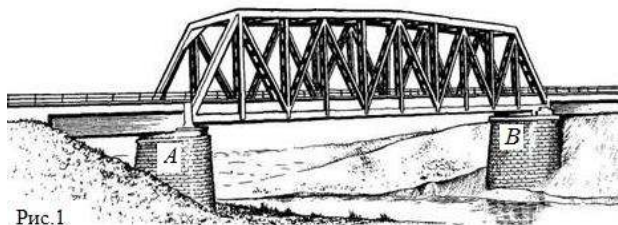


Условие

Задание 10-2. Железнодорожный мост



Любые инженерные конструкции предварительно точно рассчитываются, а их поведение в критических ситуациях многократно моделируется на предмет надежности и соответствия требованиям безопасности.



Рассмотрим длинный однопролётный железнодорожный мост (Рис. 1), по которому проходит короткий поезд с одинаковыми вагонами.

В опорах (устоях) A и B моста (см. Рис. 1) установлены датчики «избыточного» веса («избыточной реакции») для отслеживания изменения силы давления моста на данную опору при прохождении поезда (т.е. они не учитывают собственный вес моста и вес поезда на насыпи). При расчетах будем считать, что масса единицы длины (линейная плотность) поезда $\lambda = \left(\frac{\Delta m}{\Delta l}\right) = \text{const}$ есть величина известная и постоянная. При таком подходе поезд можно считать однородной «движущейся цепочкой».

В рамках данного задания вам предстоит более подробно разобрать процесс прохождения поезда по мосту с инженерной точки зрения, определить изменения динамической нагрузки на каждую из опор при этом.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$; трением и сопротивлением воздуха в данном задании пренебречь.

Часть 1. Балка на опорах

Прежде чем рассматривать движение поезда по однородному мосту, рассмотрим «пустой» мост, без поезда. Неплохой моделью такой механической системы является однородная балка, лежащая на двух опорах.

Рассмотрим однородную горизонтальную балку AB (Рис. 2) массой m , покоящуюся на точечных опорах C и D (см. Рис. 2). Расстояния от центра масс O (Рис. 2) балки до опор равны $OC = l_1$, $OD = l_2$. «Выступающие» края балки имеют длину $AC = l_3$, $DB = l_4$, соответственно. Площадь поперечного сечения балки постоянна.

1. Найдите модули N_1 и N_2 сил реакций, действующих на балку в опорах C и D , соответственно. 2. Пусть в точку B балки сел небольшой, но тяжелый жучок (Рис. 3) массой m_1 . Найдите изменения ΔN_1 и ΔN_2 модулей сил реакций, действующих на балку в каждой из опор. Укажите знаки каждого из изменений. 3. При какой минимальной массе жучка m_2 сила реакции N_1 , действующая на балку в левой опоре, обратится в нуль?

Часть 2. Длинный мост

Пусть на железнодорожный мост длиной $AB = 2l_0$ въезжает поезд длиной l_0 с одинаковыми

вагонами (Рис. 4). Условимся считать такой поезд «однородным». Поезд полностью проезжает мост и оказывается на другом берегу реки.

Рассмотрим систему в момент, когда поезд проехал по мосту расстояние x (см. Рис. 4). Пусть в этот момент в опоре A моста действует избыточная сила реакции $N_1(x)$. Для удобства расчетов и описания системы ведем безразмерные (приведенные) координаты для длины $x^* = x/l_0$ и для избыточной силы реакции $N_1^*(x^*) = N_1/(\lambda g l_0)$ в опоре моста, где λ – линейная плотность поезда, g – ускорение свободного падения.

Поскольку мост достаточно длинный, разобьем движение поезда на три этапа: выезд на мост (первый этап, $0 \leq x^* \leq 1$), движение по мосту (второй этап, $1 \leq x^* \leq 2$) и съезд с моста (третий этап, $2 \leq x^* \leq 3$).

1. Получите зависимость избыточной силы реакции $N_1(x)$ в опоре A моста от x на первом этапе. Выразите безразмерную зависимость $N_1^*(x^*)$ на этом же этапе. Рассчитайте полученную зависимость $N_1^*(x^*)$ для указанных точек и в листе ответов заполните Таблицу 1. 2. Получите зависимость избыточной силы реакции $N_1(x)$ в опоре A моста от x на втором этапе. Выразите безразмерную зависимость $N_1^*(x^*)$ на этом же этапе. Рассчитайте полученную зависимость $N_1^*(x^*)$ для указанных точек и в листе ответов заполните Таблицу 2. 3. Получите зависимость избыточной силы реакции $N_1(x)$ в опоре A моста от x на третьем этапе. Выразите безразмерную зависимость $N_1^*(x^*)$ на этом же этапе. Рассчитайте полученную зависимость $N_1^*(x^*)$ для указанных точек и в листе ответов заполните Таблицу 3. 4. На Бланке 1 в Листе ответов постройте графики зависимостей $N_1^*(x^*)$ для всех трех этапов. 5. Чему равна максимальная сила реакции $N_1^{\max}(x)$ на всех этапах движения поезда по мосту? При каком значении x_1 она достигается?

Лист ответов. Задание 10-2. Железнодорожный мост

Часть 1. Балка на опорах

1.1 Модули сил реакций (формулы):

$$N_1 =$$

$$N_2 =$$

1.2 Изменения модулей сил реакций (формулы):

$$\Delta N_1 =$$

$$\Delta N_2 =$$

1.3 Минимальная масса жучка m_2 (формула):

$$m_2 =$$

Часть 2. Длинный мост

2.1 Первый этап. Избыточная сила реакции (формулы):

$$N_1(x) =$$

$$N_1^*(x^*) =$$

Таблица 1. Расчет зависимости $N_1^*(x^*)$ для первого этапа.

	x^*
0,0	
0,1	
0,2	
0,3	
0,4	
0,5	
0,6	
0,7	

[illegible]
$$N_1^*(x^*) =$$
$$x^*$$

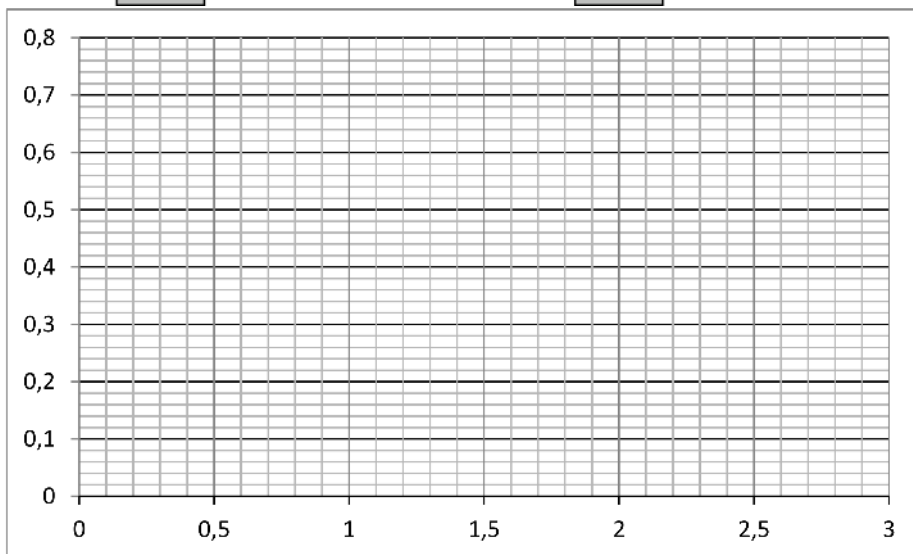
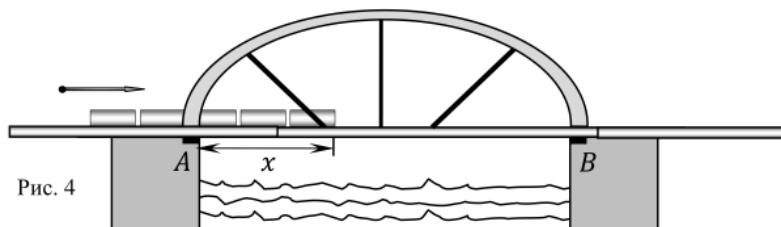
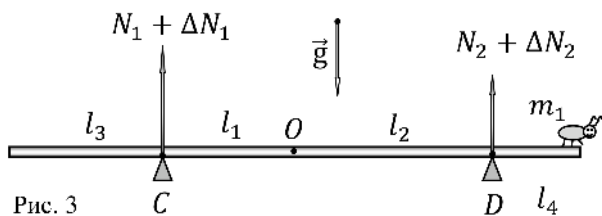
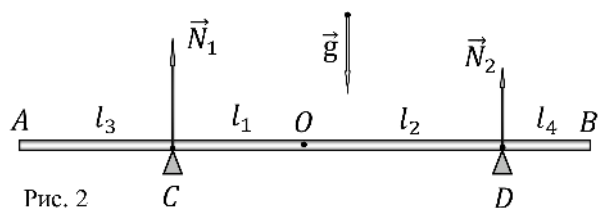
$N_1^*(x^*)$								
--------------	--	--	--	--	--	--	--	--

$$N_1^*(x^*) =$$

x^*
 |
 | 2
 | 2,1
 | 2,2
 | 2,3
 | 2,4
 | 2,5
 | 2,6
 | 2,7
 | 2,8
 | 2,9
 | 3,0
 |

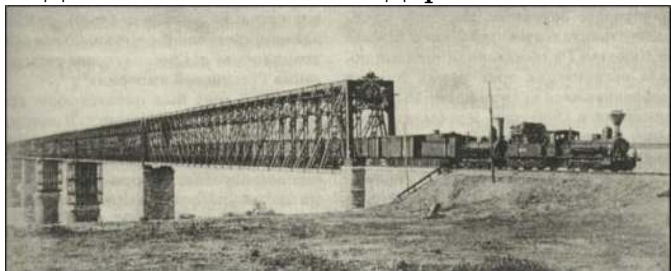
$N_1^*(x^*)$								
--------------	--	--	--	--	--	--	--	--

$$x_1 =$$



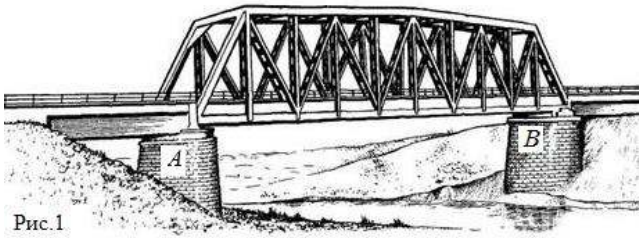
Решение

Задание 10-2. Железнодорожный мост



Любые инженерные конструкции предварительно точно рассчитываются, а их поведение в критических ситуациях многократно моделируется на предмет надежности и соответствия требованиям безопасности.

Рассмотрим длинный однопролётный железнодорожный мост (Рис. 1), по которому проходит короткий поезд с одинаковыми вагонами.



В опорах (устоях) A и B моста (см. Рис. 1) установлены датчики «избыточного» веса («избыточной реакции») для отслеживания изменения силы давления моста на данную опору при прохождении поезда (т.е. они не учитывают собственный вес моста и вес поезда на насыпи). При расчетах будем считать, что масса единицы длины (линейная плотность) поезда $\lambda = \left(\frac{\Delta m}{\Delta l}\right) = \text{const}$ есть величина известная и постоянная. При таком подходе поезд можно считать однородной «движущейся цепочкой».

В рамках данного задания вам предстоит более подробно разобрать процесс прохождения поезда по мосту с инженерной точки зрения, определить изменения динамической нагрузки на каждую из опор при этом.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$; трением и сопротивлением воздуха в данном задании пренебречь.

Часть 1. Балка на опорах

Прежде чем рассматривать движение поезда по однородному мосту, рассмотрим «пустой» мост, без поезда. Неплохой моделью такой механической системы является однородная балка, лежащая на двух опорах.

Рассмотрим однородную горизонтальную балку AB (Рис. 2) массой m , покоящуюся на точечных опорах C и D (см. Рис. 2). Расстояния от центра масс O (Рис. 2) балки до опор равны $OC = l_1$, $OD = l_2$. «Выступающие» края балки имеют длину $AC = l_3$, $DB = l_4$, соответственно. Площадь поперечного сечения балки постоянна.

1. Найдите модули N_1 и N_2 сил реакций, действующих на балку в опорах C и D , соответственно. 2. Пусть в точку B балки сел небольшой, но тяжелый жучок (Рис. 3) массой m_1 . Найдите изменения ΔN_1 и ΔN_2 модулей сил реакций, действующих на балку в каждой из опор. Укажите знаки каждого из изменений. 3. При какой минимальной массе жучка m_2 сила реакции N_1 , действующая на балку в левой опоре, обратится в нуль?

Часть 2. Длинный мост

Пусть на железнодорожный мост длиной $AB = 2l_0$ въезжает поезд длиной l_0 с одинаковыми вагонами (Рис. 4). Условимся считать такой поезд «однородным». Поезд полностью проезжает мост и оказывается на другом берегу реки.

Рассмотрим систему в момент, когда поезд проехал по мосту расстояние x (см. Рис. 4). Пусть в этот момент в опоре A моста действует избыточная сила реакции $N_1(x)$. Для удобства расчетов и описания системы ведем безразмерные (приведенные) координаты для длины $x^* = x/l_0$ и для избыточной силы реакции $N_1^*(x^*) = N_1/(\lambda g l_0)$ в опоре моста, где λ – линейная плотность поезда, g – ускорение свободного падения.

Поскольку мост достаточно длинный, разобьем движение поезда на три этапа: выезд на мост (первый этап, $0 \leq x^* \leq 1$), движение по мосту (второй этап, $1 \leq x^* \leq 2$) и съезд с моста (третий этап, $2 \leq x^* \leq 3$).

1. Получите зависимость избыточной силы реакции $N_1(x)$ в опоре A моста от x на первом этапе. Выразите безразмерную зависимость $N_1^*(x^*)$ на этом же этапе. Рассчитайте полученную зависимость $N_1^*(x^*)$ для указанных точек и в листе ответов заполните Таблицу 1. 2. Получите зависимость избыточной силы реакции $N_1(x)$ в опоре A моста от x на втором этапе. Выразите

безразмерную зависимость $N_1^*(x^*)$ на этом же этапе. Рассчитайте полученную зависимость $N_1^*(x^*)$ для указанных точек и в листе ответов заполните Таблицу 2. 3. Получите зависимость избыточной силы реакции $N_1(x)$ в опоре A моста от x на третьем этапе. Выразите безразмерную зависимость $N_1^*(x^*)$ на этом же этапе. Рассчитайте полученную зависимость $N_1^*(x^*)$ для указанных точек и в листе ответов заполните Таблицу 3. 4. На Бланке 1 в Листе ответов постройте графики зависимостей $N_1^*(x^*)$ для всех трех этапов. 5. Чему равна максимальная сила реакции $N_1^{\max}(x)$ на всех этапах движения поезда по мосту? При каком значении x_1 она достигается?

Возможные решения:

Часть 1. Балка на опорах

1. При равновесии балки выполняется правило моментов сил относительно оси, проходящей через *любую* точку системы.

Запишем правило моментов относительно точки D (Рис. 1) системы (момент силы N_2 относительно этой оси равен нулю)

$$N_1(l_1 + l_2) = mgl_2 \quad (1)$$

Из (1) найдем силу реакции N_1

$$N_1 = \frac{l_2}{l_1 + l_2} mg \quad (2)$$

Теперь рассмотрим равновесие балки относительно оси, проходящей через точку C системы (теперь момент силы N_1 относительно этой оси равен нулю)

$$N_2(l_1 + l_2) = mgl_1 \quad (3)$$

Из (3) найдем силу реакции N_2

$$N_2 = \frac{l_1}{l_1 + l_2} mg \quad (4)$$

Заметим, что (4) можно получить и другим способом, используя (2) и правило сил

$$N_1 + N_2 = mg \quad (5)$$

откуда

$$N_2 = mg - N_1 = mg - \frac{l_2}{l_1 + l_2} mg = \frac{l_1}{l_1 + l_2} mg \quad (6)$$

Интересно, что (2) и (4) не зависят от «выступающих» концов балки l_3 и l_4 , поскольку положение центра масс системы (между опорами) автоматически «учитывает» их действие и существование.

1. Жучок (точнее, его сила тяжести m_1g) увеличит силу реакции N_2 в ближней опоре C (Рис. 2) системы ($\Delta N_2 > 0$) и, соответственно, уменьшит в дальней N_1 ($\Delta N_1 < 0$). Запишем это следующим образом

$$\begin{aligned} N_1^* &= N_1 - \Delta N_1 \\ N_2^* &= N_2 + \Delta N_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем правило моментов относительно оси, проходящей через точку D системы

$$mgl_2 = (N_1 - \Delta N_1)(l_1 + l_2) + m_1gl_4 \quad (8)$$

Из (8) получим

$$\Delta N_1 = \frac{l_4}{l_1 + l_2} m_1g \quad (9)$$

Совершенно аналогично, рассматривая правило моментов относительно оси, проходящей через точку C системы, найдем

$$\Delta N_2 = \frac{l_1 + l_2 + l_4}{l_1 + l_2} m_1g \quad (10)$$

Заметим, что (10) можно получить и другим способом, используя (9) и правило сил

$$\Delta N_2 - \Delta N_1 = m_1g \quad (11)$$

откуда

$$\Delta N_2 = m_1g + \Delta N_1 = m_1g + \frac{l_4}{l_1 + l_2} m_1g = \frac{l_1 + l_2 + l_4}{l_1 + l_2} m_1g \quad (12)$$

Как следует из (9) и (10), теперь результат не зависит от l_3 , поскольку жучок сел на правый конец соломинки.

1. Из (7) и (9) следует, что сила реакции $N_1^* = N_1 - \Delta N_1$ обратится в нуль при минимальной массе жучка m_2 при условии

$$N_1 = \Delta N_1 \implies \frac{l_2}{l_1+l_2}mg = \frac{l_4}{l_1+l_2}m_2g. \quad (13)$$

Следовательно,

$$m_2 = \frac{l_2}{l_4}m. \quad (14)$$

Часть 2. Длинный мост

2.1 Рассмотрим первый этап движения поезда по мосту (выезд, $0 \leq x^* \leq 1$). Пусть в некоторый момент на мосту оказалась часть поезда длиной x (Рис. 3).

Поскольку рассматриваемый поезд «однородный», то на мосту находится его часть массой $m(x) = \lambda x$, (15)

где λ – линейная плотность поезда (масса единицы его длины).

Соответственно, центр масс этого «куска» поезда находится на расстоянии $l_1 = x/2$ от опоры A моста и на расстоянии $l_2 = 2l_0 - x/2$ от опоры B .

Согласно (2) получим, что в этом случае искомая зависимость равна

$$N_1(x) = \frac{l_2}{l_1+l_2}mg = \frac{2l_0-x/2}{2l_0}\lambda xg = \frac{(4l_0-x)x}{4l_0}\lambda g, \quad (16)$$

где g – ускорение свободного падения.

Соответственно, для безразмерной зависимости $N_1^*(x^*)$ получим параболическую функцию

$$N_1^*(x^*) = \frac{N_1(x)}{\lambda gl_0} = \frac{(4l_0-x)}{4l_0} \frac{\lambda xg}{\lambda gl_0} = \frac{(4-x^*)x^*}{4}. \quad (17)$$

Используя (17) с помощью инженерного калькулятора заполняем Таблицу 1.

Таблица 1.

	x^*										
	0,0										
	0,1										
	0,2										
	0,3										
	0,4										
	0,5										
	0,6										
	0,7										
	0,8										
	0,9										
	1,0										
$N_1^*(x^*)$	0,00	0,10	0,19	0,28	0,36	0,44	0,51	0,58	0,64	0,70	0,75

2.2 На втором этапе движения поезда ($1 \leq x^* \leq 2$, поезд целиком едет по мосту) координата его центра масс будет на расстоянии ($l_1 = x - l_0/2$) от опоры A моста и на расстоянии ($l_2 = 2l_0 - (x - \frac{l_0}{2}) = 2,5l_0 - x$) от его опоры B .

Опять же согласно (2) получим, что в этом случае искомая зависимость равна

$$N_1(x) = \frac{l_2}{l_1+l_2}mg = \frac{2,5l_0-x}{2l_0}\lambda l_0g, \quad (18)$$

где g – ускорение свободного падения.

Соответственно, для безразмерной зависимости $N_1^*(x^*)$ на этом этапе получим линейную функцию

$$N_1^*(x^*) = \frac{N_1(x)}{\lambda gl_0} = \frac{2,5l_0-x}{2l_0}\lambda l_0g = \frac{2,5-x^*}{2}, \quad (19)$$

где $x^* = x/l_0$.

Используя (19) с помощью инженерного калькулятора заполняем Таблицу 2.

Таблица 2.

x^*

1,0
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5
1,6
1,7
1,8
1,9
2,0

$N_1^*(x^*)$	0,75	0,7	0,65	0,6	0,55	0,5	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25
--------------	------	-----	------	-----	------	-----	------	-----	------	-----	------

2.3 Наконец, при съезде с моста (третий этап, $2 \leq x^* \leq 3$) часть поезда длиной $(x - 2l_0)$ уже находится на насыпи, и часть длиной $(l_0 - (x - 2l_0) = 3l_0 - x)$, соответственно, – еще на мосту. Расстояние от центра масс «мостовой» части поезда до опоры B равно $(3l_0 - x)/2$.

Следовательно, согласно (2), получим, что в этом случае искомая зависимость равна

$$N_1(x) = \frac{l_2}{l_1 + l_2} mg = \frac{(3l_0 - x)}{2l_0} \lambda (3l_0 - x) g = \frac{(3l_0 - x)^2}{4l_0} \lambda g. \quad (20)$$

Соответственно, для безразмерной зависимости $N_1^*(x^*)$ на этом этапе получим квадратичную функцию

$$N_1^*(x^*) = \frac{N_1(x)}{\lambda g l_0} = \frac{(3l_0 - x)^2}{4l_0} \frac{\lambda g}{\lambda g l_0} = \frac{(3 - x^*)^2}{4}, \quad (21)$$

где $x^* = x/l_0$.

Используя (21) с помощью инженерного калькулятора заполняем Таблицу 3.

Таблица 3.

x^*

2
2,1
2,2
2,3
2,4
2,5
2,6
2,7
2,8
2,9
3

$N_1^*(x^*)$	0,25	0,2025	0,16	0,1225	0,09	0,0625	0,04	0,0225	0,01	0,0025	0,00
--------------	------	--------	------	--------	------	--------	------	--------	------	--------	------

2.4 По таблицам 1-3 строим на бланке ответов полученную зависимость (Рис. 4) для всех трех этапов о

2.5 По Таблицам 1-3 (или из графика) находим максимальное значение

$$N_1^{\max}(x) = 0,75 \lambda g l_0. \quad (22)$$

Оно достигается в момент, когда поезд только что полностью выехал на мост

$$x_1 = l_0. \quad (23)$$

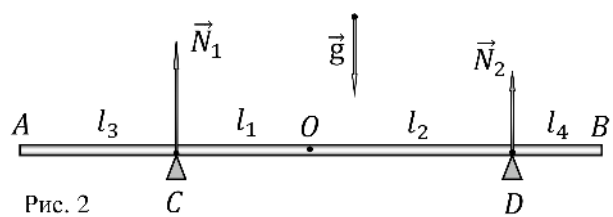


Рис. 2

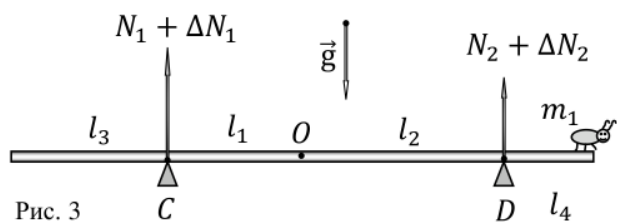


Рис. 3

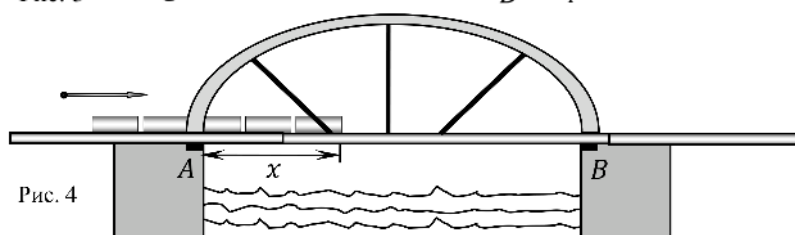


Рис. 4

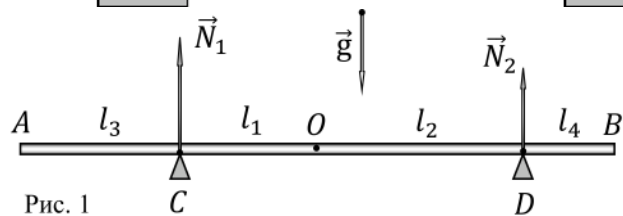


Рис. 1

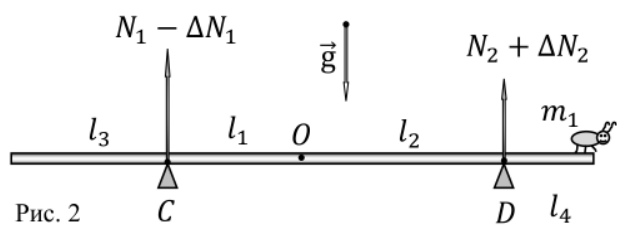


Рис. 2

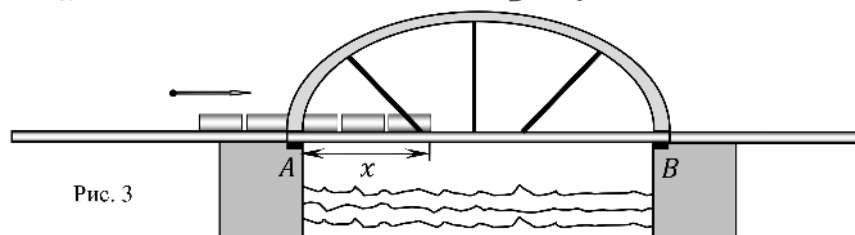


Рис. 3

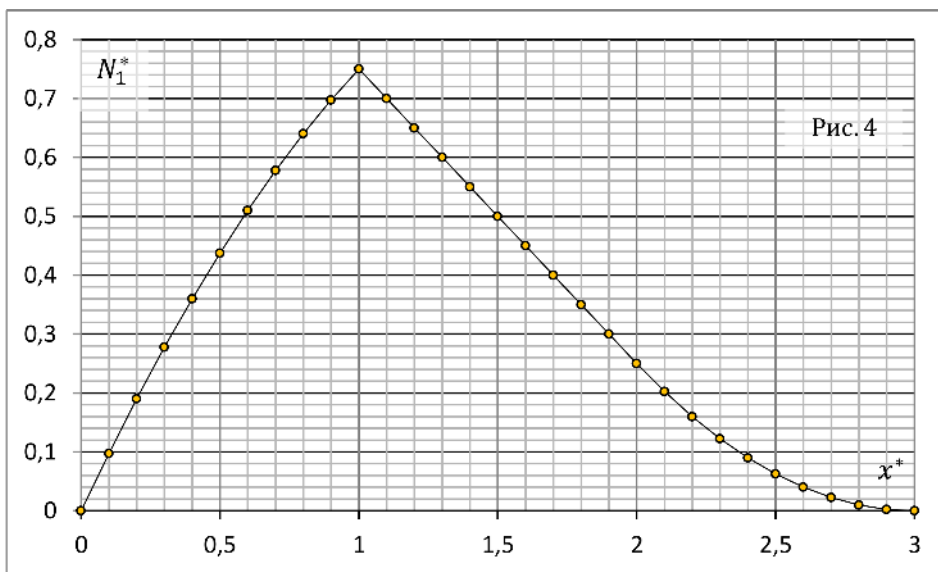


Таблица 1.

x^*	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$N_1^*(x^*)$	0,00	0,10	0,19	0,28	0,36	0,44	0,51	0,58	0,64	0,70	0,75

Таблица 2.

x^*	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$N_1^*(x^*)$	0,75	0,7	0,65	0,6	0,55	0,5	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25

Таблица 3.

x^*	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
$N_1^*(x^*)$	0,25	0,2025	0,16	0,1225	0,09	0,0625	0,04	0,0225	0,01	0,0025	0,00

