

Условие

Задание 11-3. Заряженный шар

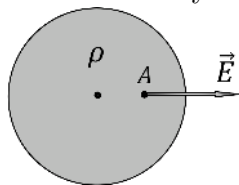
Электростатическое поле, создаваемое во всем пространстве заряженным по объёму диэлектрическим шаром в вакууме, является одной из опорных моделей прикладной электродинамики.

Рассмотрим напряженность $\vec{E}$ электростатического поля диэлектрического шара (Рис.1) радиуса R , равномерно заряженного по всему объёму V с постоянной объёмной плотностью заряда ρ ($\rho = const$) в некоторой точке A . Система находится в вакууме.

Объёмная плотность заряда представляет собой заряд единицы объема диэлектрика $\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}$, т.е. имеет размерность $[\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$.

Если заряды распределены по поверхности S (например, проводника), то говорят о поверхностной плотности заряда $\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}$, которая имеет размерность $[\sigma] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$. Поверхностная плотность заряда σ представляет собой электрический заряд единицы площади рассматриваемой поверхности.

В отличие от проводников, внутри которых поле равно нулю ($\vec{E} = \vec{0}$), поле $\vec{E}$ такого шара отлично от нуля внутри шара, например в точке A (см. Рис. 1).



В данном задании вам предстоит описать поле заряженного шара в окружающем пространстве и рассмотреть некоторые его приложения.

Для описания электростатических полей удобно использовать *телесный* угол. Телесный угол (Ω) – часть пространства, ограниченная лучами, выходящими из некоторой точки O (Рис. 2).

Единицей измерения телесного угла является стерadian («стерео радиан»): $[\Omega] = \text{стр.}$. По аналогии с плоским углом, в качестве меры телесного угла берется безразмерное отношение площади вырезанного сферического сегмента к квадрату радиуса описанной окружности.

Для малых телесных углов справедлива формула

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S_{\perp}}{r^2} = \frac{\Delta S \cos \alpha}{r^2}. \quad (2)$$

Диполем называется система из двух электрических зарядов, одинаковых по величине, но разных по знаку ($+q; -q$). Заряды находятся на малом фиксированном расстоянии l (плечо диполя, $l \ll R$) друг от друга (Рис. 3).

Действиями силы тяжести и сил трения и сопротивления воздуха в данной задаче пренебречь.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$; объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $\pi = 3,14$.

Часть 1. Поле шара

При вычислении напряженности $\vec{E}$ электростатического поля «сложных» заряженных систем достаточно часто используется принцип суперпозиции электрических полей более «простых» систем, поля которых хорошо известны.

1. Рассмотрим тонкую сферу (Рис. 4) некоторого радиуса R , равномерно заряженную с поверхностной плотностью σ ($\sigma = const$). Докажите, что для такой сферы, равномерно заряженной по поверхности, напряженность $\vec{E}$ электростатического поля внутри неё ($x < R$) равна нулю ($\vec{E} = \vec{0}$) в любой точке. 2. Рассмотрим диэлектрический шар (Рис. 5) некоторого радиуса R , равномерно заряженный с положительной объёмной плотностью ρ ($\rho = const > 0$).

Найдите зависимость $E(x)$ проекции на ось Ox напряжённости электростатического поля в некоторой точке A (см. Рис. 5) внутри такого шара ($x \leq R$), как функцию расстояния $x = OA$ от его центра O . Укажите максимальное значение E_0 полученной зависимости на данном интервале ($x \leq R$). 3. Найдите зависимость $E(x)$ проекции на ось Ox напряжённости электростатического поля вне такого шара ($x \geq R$), равномерно заряженного по всему объёму, как функцию расстояния x от его центра O . Укажите максимальное значение $E_{\max}$ полученной зависимости на данном интервале ($x \geq R$) и сравните его с E_0 . 4. Для построения суммарного графика полученных зависимостей $E(x)$ введём безразмерные величины: для напряжённости $E^* = E(x)/E_0$, для расстояния $x^* = x/R$. Рассчитайте значения $E^*(x^*)$ и внесите их в Таблицу 1 (см. Лист ответов). По точкам из Таблицы 1 на Бланке 1 (см. Лист ответов) постройте график полученной зависимости $E^*(x^*)$.

Часть 2. Пролеты через шар

Далее рассмотрим неподвижный, равномерно заряженный по объёму диэлектрический шар, поле которого вы описали в пунктах 1.2 – 1.4. Предположим, что вдоль диаметра шара просверлен достаточно тонкий канал, через который могут свободно пролетать небольшие заряженные объекты (Рис. 6).

1. Частицу массой m , с отрицательным зарядом q (по модулю), удерживают в точке A на оси Ox на расстоянии R от центра шара (см. Рис. 5). В некоторый момент времени ($t = 0$) частицу отпускают, и под действием электростатического поля $\vec{E}$ шара она начинает двигаться. Через какой промежуток времени t_1 частица окажется на противоположном конце диаметра в точке B ? 2. Какую максимальную скорость v_1 разовьёт частица при движении? В какой точке траектории она будет достигаться? 3. С каким максимальным ускорением a_1 будет двигаться частица при своём движении? В каких точках траектории оно будет достигаться? 4. Диполь, состоящий из двух шариков массой m каждый, удерживают в точке A на оси Ox на расстоянии R от центра шара (см. Рис. 7). Заряды шариков равны по модулю q . В некоторый момент времени ($t = 0$) диполь отпускают, и под действием электростатического поля $\vec{E}$ шара он начинает втягиваться в шар. Укажите знаки заряда каждого из шариков (ближнего к шару и дальнего). Через какой промежуток времени t_2 диполь окажется на противоположном конце диаметра в точке B ? 5. Какую максимальную скорость v_2 разовьёт диполь при движении? В какой точке траектории она будет достигаться? 6. Какое максимальное ускорение a_2 разовьёт диполь при движении? В какой точке траектории оно будет достигаться?

Лист ответов. Задание 11-3. Заряженный шар

Часть 1. Поле шара

1. Доказательство ($\vec{E} = \vec{0}$): достаточно привести в чистовике (проверяется).

1.2 Зависимость проекции поля внутри шара:

$$E(x) =$$

Максимальное значение поля внутри шара:

$$E_0 =$$

1.3 Зависимость проекции поля вне шара:

$$E(x) =$$

Максимальное значение поля вне шара, его сравнение с E_0 :

$$E_{\max} =$$

Таблица 1. Зависимость $E^* = E(x)/E_0$ (для заполнения).

x^*

0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9

E^*											
x^*	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	
E^*											
x^*	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
E^*											

1.4 Бланк 1. Построение графика зависимости $E^* = E(x)/E_0$ (по заполненной Таблице 1.):

Часть 2. Пролеты через шар

2.1 $t_1 =$

2. Максимальная скорость частицы:

1. $v_1 =$

1. Она будет достигаться в точке:

1. Максимальное ускорение частицы:

$a_1 =$

Оно будет достигаться в точке:

1. Знаки заряда каждого из шариков:

Промежуток времени t_2 :

1. Максимальная скорость частицы:

$v_2 =$

Она будет достигаться в точке:

1. Максимальное ускорение частицы:

$a_2 =$

Оно будет достигаться в точке:

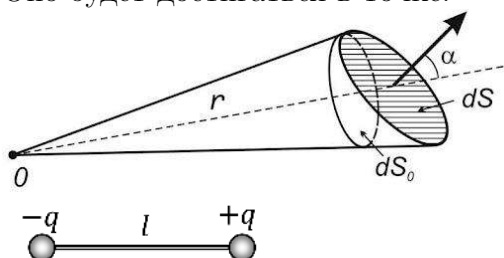
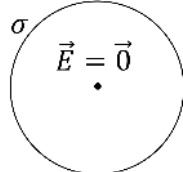


Рис. 3



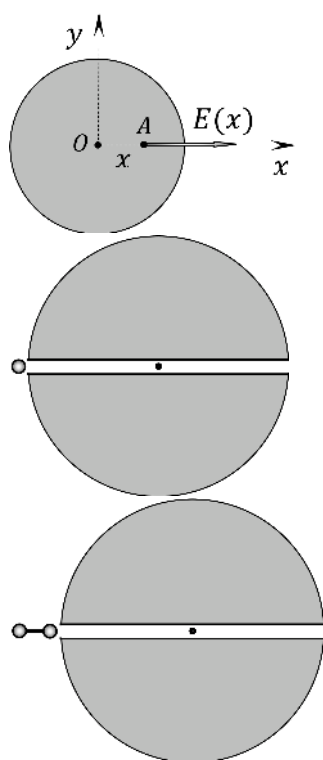
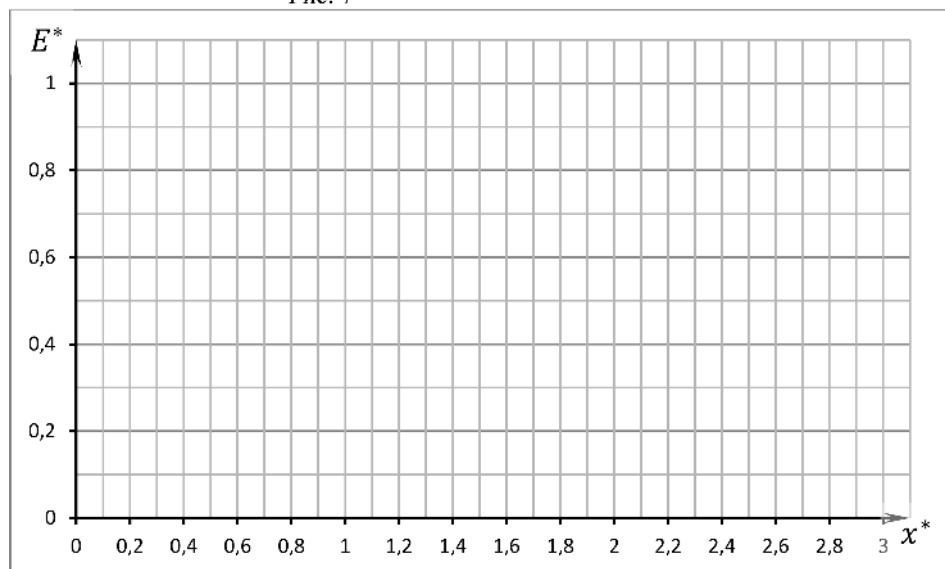
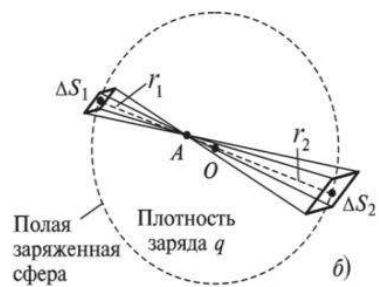


Рис. 7



Решение



x^*	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
E^*	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
x^*	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	
E^*	1	0,826	0,694	0,592	0,510	0,444	0,391	0,346	0,309	0,277	
x^*	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
E^*	0.250	0.227	0.207	0.189	0.174	0.160	0.148	0.137	0.128	0.119	0.111

